SISTEMAS LINEARES: CONCEITO E PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS

LINEAR SYSTEMS: CONCEPT AND PRODUCTION OF MEANINGS

MARIA ALICE VEIGA FERREIRA DE SOUZA*

LARISSA MARTINS SIMMER**

ISSUE DOI: 10.5008/1809.7367.057

RESUMO

Sistemas lineares integram conteúdos programáticos do Ensino Fundamental e se constituem em importante ferramenta descritiva e de decisão em contextos acadêmicos e profissionais, tais como nas Engenharias. Então, foi estudado o conceito de sistemas lineares de estudantes do ensino médio e superior das Engenharias (N=245), além de verificar a extensão da produção de significados e seus desempenhos quando aplicam tal conceito em problemas de suas áreas de atuação, por meio de análise qualitativa e quantitativa, à luz, principalmente, de teorias sócio-históricas, do discurso e de solução de problemas. O estudo revelou, principalmente, que 91% dos estudantes do Ensino Médio não responderam ou responderam erradamente sobre o que era um sistema linear, contra 74% dos estudantes do Ensino Superior. Apenas 2% dos estudantes reconheceram corretamente sistemas lineares em sua forma analítica. 42% dos estudantes resolveram o problema proposto corretamente, sendo que 22% destes, o interpretaram erradamente. Pelos resultados, concluiu-se e indica-se a necessidade de metodologias alternativas que potencializem a compreensão desses conceitos, a fim de não comprometerem seus usos em contextos acadêmicos e profissionais.

Palavras-chave: Sistemas lineares. Produção de significados. Solução de problemas.

ABSTRACT

Linear systems integrate programmatic content of Elementary Education and constitute an important descriptive and decision tool in different situations in the field of higher education. We studied the concept of linear systems of students in high school and college of Engineering (N = 245), and to identify the extent of production of meanings and their performance when they implement this concept in problems of their areas of expertise through analysis qualitative and quantitative, based especially in socio-historical theories, discourse and problem solving. The study revealed mainly that 91% of high school students did not respond or responded incorrectly on what was a linear system, compared with 74% of higher education students. Only 2% of students correctly recognized linear systems in its analytical form. 42% of students correctly solved the proposed problem, with 22% of them, misinterpreted it. From the results, it was concluded and indicates the need for alternative methodologies that enhance the understanding of these concepts in order not to compromise their use in academic and professional contexts.

Keywords: *Linear systems. Production of meanings. Problem solution.*

* Doutora em Psicologia da Educação Matemática pela UNICAMP. Professora do Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática do IFES. Professora de Matemática do IFES e FAESA atuando nas Engenharias e Ciência da Computação.alicevfs@hotmail.com.

** Graduanda do Curso de Química – FAESA

Sistema linear é um conteúdo escolar aplicado em problemas da Matemática de Ensino Médio e Superior, tendo, no entanto, início de seu estudo no Ensino Fundamental. Seus usos são exigidos em diferentes contextos educacionais e científicos porque envolvem a solução de problemas.

No contexto do Ensino Superior encontra-se a necessidade do uso desses conteúdos escolares, por exemplo, para o estudo do fluxo de gás em um gasoduto repleto de ramificações; quando precisamos controlar o escoamento de veículos em entroncamentos de vias; e, quando controlamos a elaboração de um produto que demande diferentes etapas e insumos. Mas, a solução de problemas, em geral, está no final de uma série de etapas – não lineares e que se autoinfluenciam – que se iniciam com a construção do conceito científico de determinada ferramenta matemática, quando se quer valorizar a produção de significados pelo estudante. É o que diz Vygotsky (2008), ao declarar que o desenvolvimento de um conceito científico geralmente começa com sua definição verbal e com sua aplicação em operações que ele chamou de não espontâneas, pois necessitam de atitude mediada em relação ao seu objeto. Os conceitos científicos se desenvolvem até um nível elementar e concreto, ao contrário dos conceitos espontâneos.

Nesse sentido, cresce a importância de se conhecer a produção de significados pelos estudantes dos conceitos até então desenvolvidos, de ferramentas que irão auxiliá-los em respostas a problemas mais avançados, como é o caso de sistemas lineares. De início, é preciso compreender o que seja uma equação, uma equação linear, um sistema de equações, saber manipulá-los matematicamente, conhecer seus significados para que, posteriormente, se possa utilizá-los adequadamente na solução de problemas. Espera-se que estudantes de Ensino Médio e Superior apreendam esses conceitos em nível avançado, uma vez que seus estudos têm início no Ensino Fundamental e integram paulatinamente conteúdos que o tenham como pré-requisito.

Dada a relevância para a Matemática, pergunta-se: **qual o conceito de equações e sistemas lineares de estudantes de Ensino Médio e Superior?** Deseja-se, também, investigar **o reconhecimento analítico e a correta aplicação das ferramentas matemáticas em problema cotidiano.** Para isso, três objetivos foram delineados:

1. Verificar os conceitos de equações e sistemas lineares que os estudantes de Ensino Médio e Superior apresentaram;

2. Verificar os significados produzidos pelos estudantes sobre equações e sistemas lineares apresentados em linguagem matemática analítica;

3. Verificar o desempenho dos estudantes na solução de problema que envolva o uso de sistema linear, analiticamente e contextualmente.

O interesse pelo estudo de sistemas lineares se justifica não apenas pela abrangência e importância no estudo de Ciências, como pelo alto índice de reprovação e abandono registrado na disciplina de Álgebra Linear. Instituições de ensino superior do estado do Espírito Santo apresentaram índices de reprovação maiores que 50% na disciplina, chegando a quase 90%, de acordo com a experiência da pesquisadora como docente. A disciplina compõe geralmente o ciclo básico da estrutura curricular de cursos superiores, justamente por servir de apoio a ferramentas mais técnicas e específicas que virão no futuro de cada um. É o que apontam os cursos de Exatas de duas instituições de ensino privadas e duas públicas do estado do Espírito Santo, por exemplo, como Agronomia, Ciência da Computação, Engenharia Ambiental, Engenharia Civil, Engenharia de Alimentos, Engenharia de Computação, Engenharia de Automação e Controle – Mecatrônica, Engenharia de Materiais, Engenharia de Petróleo, Engenharia de Produção, Engenharia Elétrica, Engenharia Florestal, Engenharia Industrial Madeireira, Engenharia Mecânica, Engenharia Química, Matemática, Sistemas de Informação e Zootecnia, que possuem a Álgebra Linear, entre o primeiro e quarto períodos, em suas estruturas curriculares.

Para além do fracasso escolar na aprendizagem dos referidos conteúdos, pesquisas (SOUZA, 2001) indicam que os professores devem ser sensíveis ao fato de que o conceito inicialmente apreendido pelos estudantes deve sofrer aprimoramentos conforme o nível de exigência cresça e, por isso, se torna fundamental sua intervenção no processo, tal como afirmam Coimbra (2008) e Vygotsky (2008).

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A presente pesquisa explorou o conceito e a produção de significados de estudantes no conteúdo matemático de equações e sistemas lineares. O interesse, portanto, é o da produção de significados pelos sujeitos e do nível conceitual em que se encontram nos assuntos, seus usos e aplicações no contexto de seus cursos. Para tal, procurou-se na teoria de Lev Semionovich Vygotsky apoio teórico, por se compatibilizar com os propósitos da pesquisa.

Vygotsky (1896-1934) estudou o pensamento e a linguagem de pessoas em meio a tarefas específicas. Ele possuía formação teórica que o habilitava cientificamente a investigar fenômenos que envolvam tanto o campo da psicologia quanto o da semiologia, por ter formação superior em literatura, psicologia e medicina.

A teoria desenvolvida por Vygotsky (2008) é adequada ao apoio da pesquisa por explorar o signo, a linguagem e a construção de significados de conceitos escolares em um contexto sócio-histórico. O autor procurou explicar o processo de internalização, passagem de funções elementares para superiores e as relações entre pensamento e linguagem. O processo de internalização consiste na incorporação de formas culturalmente presentes de comportamento, fazendo com que atividades externas e funções interpessoais, transformem-se em conteúdos internos. As funções elementares são determinadas pela estimulação vinda do ambiente. As funções psíquicas superiores são relações sociais interiorizadas ou, em outras palavras, uma tomada de consciência dos indivíduos fazendo com que o signo e seu emprego sejam evidenciados nessa construção, tal como Vygotsky, Luria e Leontiev (1988) nos ensinaram.

Na teoria, a construção do psiquismo é realizada a partir do social e, assim sendo, adultos ou pessoas mais experientes contribuem significativamente para a interiorização das funções psíquicas. Oliveira (1997, p.60) explica que a participação do outro serve “para movimentar os processos de desenvolvimento dos membros imaturos da cultura”. Assim, a interferência do outro contribuirá para o amadurecimento de funções que estejam primeiramente em um nível de desenvolvimento real, para levá-las ao nível potencial. O caminho entre o real e o potencial é o que Vygotsky denominou de zona de desenvolvimento proximal (ZDP).

O nível de desenvolvimento real se caracteriza por etapas consolidadas do desenvolvimento do sujeito. O nível de desenvolvimento potencial é marcado pelo desempenho de tarefas realizadas com a ajuda do outro mais experiente, desde que o sujeito esteja pronto para se beneficiar da colaboração.

Para Vygotsky, o social é o construtor do psicológico. No social a linguagem funciona como instrumento essencial para formação das funções psíquicas. A escola é um ambiente social por excelência e, por isso, espera-se que o conceito de sistemas lineares seja ali desenvolvido, com a mediação do professor ou de sujeitos mais experientes. Os estudos de Vygotsky revelaram a importância da aproximação dos conceitos espontâneo e científico. A não aproximação dos dois conceitos pode ser um dos fatores responsáveis pelos fracassos no estudo de sistemas lineares.

Além do apoio teórico sobre conceito, propõe-se estudar a solução de problema que use o sistema linear como ferramenta, optando-se pelos estudos de Johnson-Laird (1992) para tal suporte.

A solução de um problema de Matemática foi estudada por diferentes autores que identificaram, cada um a seu modo, etapas integradas que formam um todo complexo e voltado para alcançar uma solução, de acordo com Sternberg (2000), Johnson-Laird (1992), Mayer (1992), Klausmeier e Goodwin (1977), Eysenck e Keane (1994), Pólya (1946), Shoenfeld (1996). Suas abordagens são muito próximas e, então, de pouca valia seria apresentar a visão de cada um deles. Optou-se pela teoria de Johnson-Laird (1992), porque sua investigação incluiu aspectos da Psicologia aos estudos de solução de problemas, o que está em sintonia com as ideias de Vygotsky.

Para o autor, a solução de um problema deve cumprir quatro estágios: 1- compreensão do problema – compreender as condições iniciais e o objetivo ali exposto, verificar restrições ou condições que se apliquem; 2- traçar um plano – selecionar um método adequado; 3- executar o plano traçado sem erros – muitas vezes a incapacidade para a solução não está em uma deficiência de lógica, mas em um fracasso na memória; 4- verificar a resposta encontrada – avaliar a validade da resposta obtida, bem como buscar outra maneira mais simples.

Problemas cotidianos, em geral, não exigem grande trabalho mental para solucioná-los. Já aqueles praticados em graduações e que requerem o uso de ferramentas matemáticas, costumam requerer estratégias mais elaboradas.

Johnson-Laird (1992) exemplifica, dizendo que a construção de uma ordem linear para problemas de série de três termos, demanda um reordenamento mental das premissas. Daí torna-se relativamente fácil combiná-las para se usar a representação para a resposta ou conclusão. Mas, dependendo das premissas e da conclusão pedida, as dificuldades no arranjo mental aumentam. Busque solucionar o seguinte problema:

B > C (B é maior do que C)

A > B (A é maior do que B)

Quem é maior? Quem é menor?

Se o sujeito construir uma ordem linear do tipo A > B > C, é possível responder qualquer pergunta sobre as premissas. Mas, nas premissas...

B é melhor do que C

A é melhor do que B

C é pior do que A?

A pergunta se torna mais difícil diante da necessidade de maior complexidade em seu arranjo representacional mental. Para Johnson-Laird (1992, p. 205), “aqueles que raciocinam são muito afetados pelo conteúdo das premissas, parece como se a mente não conseguisse, ordinariamente, quaisquer regras formais de inferência contidas dentro de uma lógica mental”. Para Woodworth e Sells (*apud* JOHNSON-

-LAIRD, 1992, p. 205), outra “hipótese antiga e influente é a de que os solucionadores são seduzidos pela atmosfera das premissas”. Acompanhe o raciocínio:

Todos os pilotos são artistas.

Todos os esquiadores são artistas.

Alguns, provavelmente influenciados pela atmosfera da palavra “todos”, poderiam inferir que todos os pilotos sejam esquiadores. Alternativamente, outra explicação, foi a de que alguns poderiam crer que o contrário da segunda premissa fosse válido: todos os artistas são esquiadores. No caso, a conclusão de que todos os pilotos sejam esquiadores seria válida.

Para Johnson-Laird (1983; 1992), inferir sobre premissas em um problema seria como construir um modelo mental (ou modelos) do estado de coisas ali descritas, para então, buscar-se variantes do modelo para descobrir se existiriam quaisquer conclusões que pudessem ser feitas. Seus estudos foram mais profundos para raciocínio dedutivo e, deste, o silogístico. No entanto, sua teoria é suficientemente abrangente (EYSENCK; KEANE, 1994) para estudos do raciocínio em meio à solução de problemas de maneira geral.

SUJEITOS, INSTRUMENTOS E PROCEDIMENTOS

O estudo qualitativo, com respaldo quantitativo, contou com a análise dos conceitos de equações e sistemas lineares de 245 estudantes (N=245), sendo 55 do Ensino Médio e 190 graduandos de Engenharia de instituições de ensino do Estado do Espírito Santo. Os 190 estudantes do Ensino Superior eram alunos regulares da disciplina de Álgebra Linear da pesquisadora. Os 55 estudantes do Ensino Médio faziam parte de uma turma em que o professor de Matemática permitiu a inferência. Todos declararam já terem estudado os conteúdos em séries passadas. Assim, as amostras não foram equilibradas, o que não prejudica a pesquisa, por poder-se trabalhar com proporções e não com termos absolutos para as análises. Ademais, as amostras são maiores do que o mínimo de 30 elementos exigidos pelas teorias da Estatística.

A coleta de dados foi levada a cabo por meio de um questionário que explorou a compreensão do que sejam equações lineares, sistemas lineares, seus reconhecimentos em linguagem matemática analítica, bem como o desempenho na sua aplicação em um problema que envolveu a compreensão, o cálculo e a interpretação no uso das ferramentas. Os itens do questionário vinham sendo usados paulatinamente em avaliações pela pesquisadora em disciplinas de Álgebra Linear, tanto do Ensino Médio quanto do Ensino Superior, sendo, portanto, aptos a responder aos questionamentos de pesquisa. Os sujeitos foram convidados a responder e, após breve texto explicativo dos propósitos da mesma, assinaram, nos instrumentos de pesquisa, suas autorizações. As perguntas eram:

1. Como você reconhece uma expressão como sendo de uma equação linear?

2. O que você entende por um sistema linear?

3. Marque com um “X” as equações abaixo que sejam lineares nas variáveis x, y e z:

( ) $5x + 2y = 10$ ( ) $\ln x + y = 5$ ( ) $x^y + z = 4$

( ) $2x^3 - 4y = 7$ ( ) $y = 5x + 1$ ( ) $xy + z = 2$

( ) $\text{sen}\,(12) = xy$ ( ) $x + y = 18$ ( ) $4x^2 = y + 5$

4. Marque com um "X" os sistemas que sejam lineares nas variáveis x, y e z.

( ) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ ( ) $\begin{cases} 5x + 4y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$ ( ) $\begin{cases} 2x^2 + 5 = 8 \\ 5\cos x + 4 = 22 \end{cases}$

( ) $\begin{cases} x\,\text{sen}\, y = 4 \\ x\cos y = 3 \end{cases}$ ( ) $\begin{cases} \ln x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$ ( ) $\begin{cases} x + y = \textit{sen}\ k \ \textit{(k é const.)} \\ x^k + y = 2 \end{cases}$

5. Para que valores da constante k o sistema de equações lineares não admite solução?

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = k \end{cases}$$

6. Uma ração para canários é composta por dois tipos de sementes: A e B. Cada uma delas contém três nutrientes importantes, x, y e z, em quantidades diferentes:

   Na ração A foram usadas 5 unidades de um nutriente x; 3 unidades de um nutriente y; 1 unidade de um nutriente z.

   Na ração B foram usadas 4 unidades de um nutriente x; 6 unidades de um nutriente y; 2 unidades de um nutriente z.

   Se a ração for preparada com 2 sementes A e 3 da semente B, qual a quantidade que encontraremos para cada um dos três nutrientes?

Para a aplicação dos questionários, foram cedidos 50 minutos, pelo respectivo professor da turma de Matemática do Ensino Médio – e de Álgebra Linear – nas Engenharias.

A análise dos dados coletados a partir dos questionários, foi realizada segundo a teoria de Laurence Bardin. Segundo Bardin (1998, p. 31-38), a análise de conteúdo se resume em um conjunto de técnicas de análise das comunicações que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens. Para ela, o conteúdo do que é dito/escrito, é passível de ser analisado. De maneira geral, toda comunicação linguística pode ser interpretada à luz das técnicas de análise de conteúdo. A análise de conteúdo tem como objetivo estudar relações entre as estruturas semântico-linguísticas com as estruturas psicológicas e sociológicas envolvidas. Isso nos afasta da hipótese de que a análise de conteúdo possa nos direcionar a um estudo da língua ou da linguagem empreendida pelos sujeitos, e nos aproxima das condições de produção das relações acima citadas.

As respostas aos questionários possibilitaram a elaboração das categorias constantes nas Tabelas 1 a 9, apresentadas no próximo tópico.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados apresentados pelos 245 estudantes foram categorizados segundo as informações dadas por eles, para cada questionamento.

Observou-se do primeiro questionamento – **como você reconhece uma expressão como sendo de uma equação linear?** – respostas que podem ser agrupadas segundo as seguintes categorias, conforme Tabela 1: não respondeu, respondeu com base em algum aspecto da expressão analítica, respondeu com base geométrica, respondeu de forma desconexa ou erradamente.

Tabela 1: Resultados do questionamento aos 245 estudantes sobre o reconhecimento de uma expressão como sendo de uma equação linear

Categoria	N	(%)
Não respondeu	93	38
Respondeu com base em aspectos da expressão analítica	124	51
Respondeu com base geométrica	17	7
Respondeu erradamente ou sem sentido	11	4
TOTAL	**245**	**100**

Vale dizer que ninguém respondeu de forma completa, ou seja, para que uma expressão seja considerada de uma equação linear, é preciso cumprir com cinco exigências, conforme Poole (2004): todas as variáveis devem estar elevadas a um, não pode haver argumentos trigonométricos, logarítmicos ou exponenciais e não pode existir produto de variáveis. Além disso, a forma geral de uma equação linear nas *n* variáveis $x_1, x_2,..., x_n$ pode ser escrita na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$ sendo $a_1 + a_2 + ... + a_n$, os coeficientes e o termo independente *b* são constantes.

As respostas com base em aspectos da expressão analítica deixaram pistas de que os estudantes tinham alguma noção, mesmo que mínima, sobre o reconhecimento da expressão. Algumas delas foram: “não há incógnita ao quadrado”, “F(x) = ax + b”, “não tem número elevado a outro”, “quando não tem elevado ao quadrado, cubo etc”, “é elevado a um”, “equação com somas ou produtos de constantes e variáveis de primeiro grau”.

De qualquer modo, há muita confusão ainda quanto aos significados dos termos. Na declaração “não há incógnita ao quadrado”, o estudante parece não conhecer a diferença entre incógnita e variável, além de não poder ser somente elevado a expoente dois. Outro estudante, ao revelar ser “F(x) = ax + b”, reduziu todas as expressões à segunda dimensão. Além disso, F(x) = ax + b, costuma ser notação para a função polinomial de primeiro grau. De qualquer forma, se houvesse delineamento do significado de F(x) e b, poderíamos obter a equação. Um terceiro estudante, ao declarar “não tem número elevado a outro", possivelmente, se lembrou de que as variáveis, e não números, são todas elevadas a um quando não há qualquer número em seu expoente, sendo que, na verdade, estão sim elevadas a um número – o número um – que geralmente não é escrito, como padrão. Por fim, quando o estudante informa ser "equação com somas ou produtos de constantes e variáveis de primeiro grau", parece se lembrar da estrutura de uma equação com as operações de soma unindo os monômios e, a operação de produto, unindo a parte literal e a variável em um monômio.

Os estudantes que responderam com base geométrica lembraram-se de seu comportamento no espaço, declarando ser "uma linha", "uma reta", "uma representação linear". Mas o questionamento foi feito em relação à sua forma como expressão analítica, e não como expressão geométrica. De todo modo, como a pergunta não especificou, é possível ter entendido ser em sua expressão geométrica.

Onze estudantes responderam com sentenças sem sentido ou erradas: "são equações que têm variáveis de x, y, z", "não é necessário e quase nunca irá ter os valores de x, y, z", "você deverá seguir a fórmula matemática para descobrir o valor" e, "linear é uma equação de apenas uma linha".

A análise também é possível por outro ângulo, conforme Tabela 2. Em termos de nível médio e superior, como se agrupariam essas respostas?

Tabela 2: Resultados do primeiro questionamento aos 245 estudantes, agrupados segundo o nível escolar

Categoria	Nível superior/ (%)	Nível médio/ (%)
Não respondeu	59 (31)	34 (62)
Respondeu com base em aspectos da expressão analítica	113 (59)	11 (20)
Respondeu com base geométrica	17 (9)	-
Respondeu erradamente ou sem sentido	1 (1)	10 (18)
TOTAL	**190**	**55**

Observou-se da Tabela 2 que quase todas as respostas desconexas ou erradas vieram dos estudantes de Ensino Médio. Esse pode ser um indicativo de que o conceito evoluiu desse nível escolar para o outro, mesmo que timidamente, conforme prevê a teoria de Vygotsky. A hipótese é reforçada ao constatar-se que 62% dos estudantes de Ensino Médio não responderam à pergunta, contra somente 31% do Ensino Superior. Além disso, se considerarmos o fato de que 59% dos estudantes do Ensino Superior responderam baseados em aspectos da expressão analítica, sugere haver tido alguma evolução desse conceito.

Em relação ao segundo questionamento – **o que você entende por um sistema linear?** – foram criadas as categorias a partir das respostas dos estudantes: não respondeu, respondeu com base no gráfico, respondeu corretamente, respondeu erradamente ou sem sentido ou de forma analítica incompleta. Os resultados, considerando os 245 estudantes, foram os descritos na Tabela 3.

Tabela 3: Resultados do questionamento aos 245 estudantes sobre o que se entende por um sistema linear

Categoria	N	(%)
Não respondeu	95	39
Respondeu com base no gráfico	7	3
Respondeu corretamente	47	19
Respondeu erradamente ou sem sentido ou de forma analítica incompleta	96	39
TOTAL	**245**	**100**

Comparando-se os resultados da Tabela 1 e 3, é possível inferir que apesar de 47 estudantes responderem corretamente ao que seja um sistema linear – sistema formado por duas ou mais equações lineares – não há clareza do que seja uma equação linear. Para os estudantes, seja lá o que for uma equação linear, há compreensão do que seja um sistema linear. Apesar do resultado, 78% dos estudantes não souberam responder ou responderam erradamente, sem sentido ou de forma incompleta. Alguns dos protocolos foram: “onde há mais de uma variável e uma constante”; “duas equações de grau qualquer”; “é um sistema crescente”. Os protocolos falam por si só quanto à extensão de seus conceitos sobre o que seja um sistema linear.

Agrupando-se, agora, os dados pelo nível escolar, tal como foi feito com o questionamento sobre as equações lineares, obteve-se o resultado apresentado na Tabela 4.

Tabela 4: Resultados do segundo questionamento aos 245 estudantes, agrupados segundo o nível escolar

Categoria	Nível superior/ (%)	Nível médio/ (%)
Não respondeu	55 (29)	40 (73)
Respondeu com base no gráfico	4 (2)	3 (5)
Respondeu corretamente	45 (24)	2 (4)
Respondeu erradamente ou sem sentido ou de forma analítica incompleta	86 (45)	10 (18)
TOTAL	**190**	**55**

A partir da Tabela 4, é possível concluir haver maior quantidade de estudantes respondendo corretamente no Ensino Superior (24%) do que no Ensino Médio (4%), o que, novamente, confirma a teoria de Vygotsky, de que os conceitos evoluem à medida que se agregam conhecimento à estrutura cognitiva dos sujeitos. Outras teorias declaram o mesmo fato em termos diferentes, como a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (2002). Esse autor pontua que a aprendizagem se dá em um movimento dinâmico a partir de conteúdos prévios já internalizados na estrutura cognitiva. Os conteúdos receberão novos elementos que, por sua vez, poderão modificar e dar outras significações àqueles pré-existentes. Assim é que os conceitos vão se tornando complexos e mais avançados.

A pesquisa também revelou alto índice (91%) de não respondentes e respondentes que apresentaram conceitos errados, sem sentido ou incompletos de estudantes de Ensino Médio. O fato é preocupante, pois tende a comprometer a evolução da estrutura cognitiva do estudante quando for requerido ao uso das ferramentas em situações concretas, como no caso do Ensino Superior, principalmente. A constatação pode ser forte indício para os fracassos observados em disciplinas de Álgebra Linear em graduações, quando se deseja a produção de significados para os objetos matemáticos. Tal linha de pensamento é reforçada ao se constatar o índice de 74% nas mesmas categorias pelos estudantes do Ensino Superior.

Outro item extraído da Tabela 4 que vale destacar é a baixa tendência em se entender sistemas lineares pelo modo gráfico, tanto no Ensino Médio (5%) quanto no Ensino Superior (2%). Apesar de os protocolos dos estudantes não expressarem corretamente o que seja um sistema linear, eles podem ser sujeitos que tenham tendência a pensar de modo imagético, conforme nos informam teóricos da Psicologia Cognitiva: Krutetskii (1976), Johnson-Laird (1992) e Sternberg (2000), para citar alguns. Então, os docentes devem estar atentos à diversificação de seus discursos para alcançar mentes não tão analíticas, e também as mais geométricas.

O estudo de sistemas lineares pode ser traduzido de maneira geométrica. Um sistema linear que tenha retas dispostas no espaço concorrentemente resultará em uma única solução. Se a disposição das retas for paralela, o resultado será nenhuma solução e, por fim, se as retas forem coincidentes, obter-se-á infinitas soluções, conforme Kolman e Hill (2006).

O terceiro e quarto questionamentos exploraram **o reconhecimento analítico de equações lineares e de sistemas lineares**. Para esses tópicos, as respostas dos estudantes foram categorizadas em: “não soube responder ou entendeu não haver nenhuma equação/sistema linear”; “errou apenas uma das equações/sistemas”; “errou mais de duas equações/sistemas”; “acertou as 3 únicas equações lineares”, conforme a Tabela 5.

Tabela 5: Resultados dos questionamentos aos 245 estudantes sobre o reconhecimento analítico de equações lineares e sistemas lineares

Categoria	Equações Lineares N (%)	Sistemas Lineares N (%)
Não soube responder/não há equações lineares/ sistemas lineares	16 (6)	18 (7)
Errou apenas uma das equações/sistemas	63 (26)	68 (28)
Errou mais de duas equações/sistemas	144 (59)	154 (63)
Acertou as três únicas equações/sistemas lineares	22 (9)	5 (2)
TOTAL	**245 (100)**	**245 (100)**

O correto reconhecimento dessas ferramentas matemáticas não parece estar esclarecido para muitos estudantes (59% e 63%, respectivamente, erraram mais de dois itens), conforme a Tabela 5. O resultado parece estar em sintonia com o que foi apresentado pelos estudantes nos questionamentos anteriores. Não saber ou ter conceitos errados sobre o que sejam equações lineares e sistemas lineares, os leva, possivelmente, ao erro nos seus reconhecimentos analíticos visuais.

Há, ainda, os que acertaram as únicas três equações e os únicos três sistemas lineares, que somados àqueles que erraram apenas um item, revela índices de 35% e 30%, respectivamente. Momento no qual houve interesse em se conhecer se havia uma equação mais frequentemente marcada entre os que erraram apenas um. Houve: a equação “xy + z = 2”. Observou-se que nenhuma outra equação possuía produto de variáveis com expoentes unitários. O fato leva a crer que os expoentes unitários, independentemente do produto das variáveis, foi o que determinou sua opção. Se a hipótese for verdadeira, há indícios de que o conceito de muitos estudantes ainda não evoluiu para as cinco exigências para uma equação ser considerada linear. Eles reconhecem corretamente quatro: os expoentes das variáveis devem ser unitários, não pode haver argumentos trigonométricos, logarítmicos ou exponenciais nas variáveis.

Por fim, os resultados da Tabela 5 também informam haver paridade entre os percentuais observados para as respostas das equações e as respostas de sistemas lineares.

No que diz respeito ao questionamento “**para que valores da constante K o sistema de equações lineares não admite solução?**”, desejou-se conhecer a interpretação dada pelos estudantes ao resolverem um sistema linear. Para as respostas foram criadas quatro categorias: “Não soube resolver”; “Acertou: k≠6”; “Encontrou: k=6”; “Encontrou respostas erradas/absurdas”, conforme Tabela 6.

Tabela 6: Resultados obtidos da resolução de um sistema linear e a correspondente interpretação aos 245 estudantes

Categoria	N	(%)
Não soube resolver	92	38
Acertou: k≠6	50	20
Encontrou: k=6	55	22
Encontrou respostas erradas/absurdas	48	20
TOTAL	**245**	**100**

Da Tabela 6, constata-se que, na verdade, 42% dos estudantes souberam resolver o sistema linear $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = k \end{cases}$ corretamente. A diferença entre a segunda e a terceira categorias é que 55 de 105 estudantes não interpretaram o resultado obtido, ou seja, não cumpriram com a quarta etapa descrita por Johnson-Laird, quando da solução de problemas. Pediram-se os valores de k que tornariam o sistema impossível. Quando k=6, resulta em infinitas soluções. O que contraria esse resultado é exatamente o contrário, ou seja, quando k≠6, obtém-se nenhuma solução, porque retira de k a multiplicidade ocorrida entre os coeficientes das variáveis x e y das duas equações. Daí, qualquer valor diferente de 6 tornará o sistema impossível. O fenômeno – da não interpretação do resultado obtido na solução de problemas – foi também verificado por Schoenfeld (1996). Ao perguntar a seus alunos quantos veículos com capacidade de 36 pessoas são necessários para transportar 1128 soldados, 29% disseram “31, resto 12”, 18% responderam “31”, e somente 23% declararam “32”, corretamente.

Apesar da ausência de interpretação de alguns estudantes, o índice dos que não souberam resolver ou que encontraram respostas erradas ou absurdas foi maior (58%). O resultado reforça o cenário de altas reprovações em Álgebra Linear verificadas no Ensino Superior.

Tabela 7: Resultados sobre a resolução de um sistema linear e sua correspondente interpretação com os 245 estudantes, agrupados segundo o nível escolar

Categoria	Ensino Superior/(%)	Ensino Médio/(%)
Não soube resolver	50 (26)	42 (76)
Acertou: k≠6	50 (26)	-
Encontrou: k=6	54 (28)	1 (2)
Encontrou respostas erradas/absurdas	36 (19)	12 (22)
TOTAL	**190**	**55**

A Tabela 7 revela que a maior parte dos que não souberam resolver concentra-se no Ensino Médio (76%). Em contrapartida, 54% dos estudantes de Ensino Superior resolveram corretamente o sistema, apesar de aproximadamente metade não ter realizado a interpretação corretamente – quarta etapa da solução descrita por Johnson-Laird. O resultado leva a crer em progresso, no que diz respeito à manipulação algébrica do sistema, da passagem de estudantes de Ensino Médio para o Ensino Superior.

Por fim, foi proposto aos 245 estudantes **resolverem um problema cotidiano que fizesse uso da ferramenta de sistemas lineares**. As respostas permitiram formular três categorias: "não soube resolver"; "acertou a solução: (22, 24, 8)", "encontrou respostas erradas/absurdas", conforme Tabela 8.

Tabela 8: Resultados da proposta aos 245 estudantes de resolução de um problema cotidiano que fizesse uso de sistemas lineares

Categoria	N	(%)
Não soube resolver	87	35
Acertou a solução: (22, 24, 8)	102	42
Encontrou respostas erradas/absurdas	56	23
TOTAL	**245**	**100**

Os resultados da Tabela 8 mostram que 42% dos estudantes resolveram corretamente o problema cotidiano proposto. Este é um índice que não deve ser desprezado, pois, apesar dos altos índices de baixa compreensão dos conceitos e dos problemas encontrados no reconhecimento das ferramentas, há certa compreensão do que o conteúdo de sistemas pode fazer para solucionar o problema. É possível, daí, concordar com as teorias de Vygotsky e de Ausubel que dizem que a aprendizagem não é algo linear, mas construída em meio à atividade e que, conforme se avança em conhecimento, essa estrutura se atualiza, tornando conceitos antigos, mais complexos. O fato de o conceito de um sujeito sobre determinado assunto ainda estar em construção e necessitando de aprimoramentos, não impede que ele realize outras tarefas ligadas ao assunto. É possível que o algoritmo de solução de problemas como o proposto esteja internalizado na estrutura cognitiva dos estudantes, de forma mecânica. Conforme surgem novos elementos de aprendizagem, a estrutura se renova, aumentando o potencial de compreensão pelo sujeito. Por outro lado, também é possível que esses estudantes tenham atingido o nível de compreensão que se espera de um estudante, tanto de nível Médio quanto de Superior. Somente uma pesquisa descritiva dos passos das soluções poderia revelar esse item.

Os dados também revelam que 58% dos estudantes não souberam resolvê-lo ou encontraram respostas absurdas e/ou erradas. O índice reforça os fracassos encontrados em disciplinas como a Álgebra Linear.

Vale investigar o comportamento dos estudantes agrupando-os em níveis de escolaridade, conforme a Tabela 9.

Tabela 9: Resultados sobre a resolução de um sistema linear e sua correspondente interpretação com os 245 estudantes, agrupados segundo o nível escolar

Categoria	Ensino Superior/(%)	Ensino Médio/(%)
Não soube resolver	53 (28)	34 (62)
Acertou a solução: (22, 24, 8)	96 (51)	6 (11)
Encontrou respostas erradas/absurdas	41 (21)	15 (27)
TOTAL	**190 (100)**	**55 (100)**

Destaca-se da Tabela 9 que 89% dos estudantes do Ensino Médio não souberam resolver ou encontraram respostas erradas e/ou absurdas e, 49% nessas mesmas condições, no Ensino Superior. O resultado leva a crer que o avanço da escolaridade contribuiu com a produção de significados dos estudantes, confirmando as teorias educacionais antes mencionadas. Outro fator que contribui para essa conclusão é o de que 51% dos estudantes de nível superior resolveram adequadamente o problema, contra apenas 11% dos de nível médio, o que sugere investirem-se mais esforços educacionais na aprendizagem do Ensino Médio.

CONCLUSÕES E INDICAÇÕES DE MELHORIAS NA PRÁTICA DOCENTE

O estudo revelou baixa compreensão do que seja um sistema linear. Não apenas pelo que seja um “sistema”, mas também pelo termo “linear”. Foi investigado, por isso, os seus entendimentos sobre o que seria uma equação linear. Os conceitos declarados pelos estudantes, quando declarados, estiveram baseados, principalmente, em fragmentos de aspectos analíticos vividos por eles em aulas de Matemática. Nenhum dos 245 estudantes atingiu um nível de compreensão completo, revelando, com isso, insuficiências no ensino praticado em níveis escolares anteriores.

O reconhecimento analítico de um sistema linear, do mesmo modo, ficou comprometido. Apenas 2% dos 245 estudantes reconheceram corretamente os únicos três sistemas lineares entre os seis apresentados. A confusão se concentrou em produto de variáveis, argumentos logarítmicos e trigonométricos, o que leva a crer em problemas conceituais sobre os tópicos.

Apesar do resultado negativo acerca do conceito de sistemas, 42% dos estudantes resolveram corretamente o problema proposto, sendo que 22% deles interpretaram o problema incorretamente. O resultado, comparado aos anteriores, levanta a possibilidade de o estudo de sistemas lineares ter sido desligado das compreensões do que a ferramenta matemática significa. A aplicação de sistemas pode ter sido realizada por algoritmos pré-estabelecidos durante o curso educacional escolar, mas que não garante a evolução ou mesmo a apreensão do conceito.

Concluiu-se, da pesquisa, que maiores investimentos didático-pedagógicos devem ser empreendidos nesse tópico matemático, a fim de potencializar a compreensão e, consequentemente, sua aplicação acadêmica e profissional.

A título de contribuição e sugestão, indicam-se aqui elementos importantes a serem observados quando de seus planejamentos no conteúdo de equações e sistemas lineares. Todo novo conteúdo deve partir da bagagem cultural trazida pelos estudantes, tal como indicado por Vygotsky. Uma sugestão poderia ser a comparação de uma equação com o sistema de balança de pratos. Há de haver um equilíbrio entre os pesos em cada prato para haver uma equação, do contrário, tem-se uma inequação. Após essa compreensão, é importante associá-la à linguagem específica. A Matemática faz uso de linguagem própria e é preciso dominá-la para acessar conhecimentos futuros e para se comunicar fatos matemáticos.

Os exercícios de fixação não devem ser esquecidos por cumprirem com a etapa de automatização dos conteúdos. Neurocientistas, como Kandel (2009), informam que essa é a fase da aprendizagem que os conteúdos se fixam na memória de longo prazo e, por isso, não devem ser desprezados. O que não deve ocorrer é seu uso desligado das outras etapas, pois, se assim for, temos presente a aprendizagem mecânica, prática não recomendada. A fixação também pode ser feita com uso de jogos apropriados. Em meio aos exercícios, é sempre vantajoso retornar ao conceito e enriquecê-lo com outras situações que esclareçam a ferramenta, agora, em um nível mais avançado.

Por fim, vale envolver os estudantes em estudos de aplicação e desafiadores, pois é o objetivo maior da educação em termos de formação científica. A solução de problemas não só fará com que o conceito seja enriquecido, influenciando positivamente outras esferas de conhecimento, como contribuirá para a formação dos sujeitos em nível superior. Não raro, engenheiros, por exemplo, se deparam com situações-problema específicas e que requerem alta capacidade para solucioná-las. É o caso de engenheiros que se especializam em petróleo, mineração, siderurgia, etc.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **Adquisición y retención del conocimiento:** una perspectiva cognitiva. Barcelona: Paidós, 2002.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1998.

COIMBRA, J. L. **Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da Álgebra Linear.** 2008. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico da Universidade Federal do Pará.

EYSENCK, W. M.; KEANE, M. T. **Psicologia cognitiva**: um manual introdutório. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

JOHNSON-LAIRD, N. P. A capacidade para o raciocínio dedutivo. In Sternberg (Ed.), **As capacidades intelectuais humanas:** uma abordagem em processamento de informações (pp. 194-216). Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.

JOHNSON-LAIRD, N. P. **Mental models**. Cambridge: Harvard University Press, 1983.

KANDEL, E. R. **Em busca da memória**: o nascimento de uma nova ciência da mente. São Paulo: Companhia das Letras, 2009.

KLAUSMEIER, H. J.; GOODWIN, W. **Manual de psicologia educacional**: aprendizagem e capacidades humanas. São Paulo, SP: Harbra & Row do Brasil, 1977.

KOLMAN, B.; HILL, D. R. **Introdução à Álgebra Linear**: com aplicações. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

KRUTETSKII, V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren**. Chicago: The University of Chicago Press, 1976.

MAYER, E.R. **Thinking, problem solving, cognition**. New York: W. H. Freeman and Company, 1992.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky:** aprendizado e desenvolvimento, um processo sócio-histórico. 4. ed. São Paulo: Scipione, 1997.

PÓLYA, G. **How to solve it**: a new aspect of mathematical method. Princeton: Princeton University Press, 1946.

POOLE, D. **Álgebra linear**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

SHOENFELD, A. Por que toda essa agitação acerca da resolução de problemas? In ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Eds.), **Investigar para aprender matemática** (pp.61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT, 1996.

SOUZA, M. A. V. F de. **Uma análise de discursos no ensino e aprendizagem de função**. 2001. 258 f. (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

STERNBERG, R. J. **Psicologia Cognitiva**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

VYGOTSKY, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N**. Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. Originalmente publicado em 1933. Traduzido por Maria da Penha Villalobos. São Paulo: Ícone, 1988.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2008.

Recebido em agosto 2013
Aceito em Outubro 2013

Correspondência para/Reprint request to:
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza
Av. Desembargador Augusto Botelho, 566, apt 402, Praia da Costa, Vila Velha – ES,
CEP: 29101-110.
Email: alicevfs@hotmail.com